Universidade Federal do Paraná

Setor de Ciências Exatas

Departamento de Matematica Prof. Juan Carlos Vila Bravo

Nome:

2^{da} PROVA DE ÁLGEBRA LINEAR

Curitiba, 16 de Outubro de 2017

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$
   (i) Determine uma base do núcleo de T.
   (ii) Dê a dimensão da imagem de T.
   (iii) T é sobrejetora? Justifique.
   (iv) Faça um esboço de $Ker(T)$ e $Im(T)$.

2. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x - y - z, 4x - y + 2z)$.
   (i) Considerando $A = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ e $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$, encontre $\Big[T\Big]_B^A$
   (ii) Usando a matriz $\Big[T\Big]_B^A$ da questão $2(i)$, encontre as coordenadas $\Big[T(u)\Big]_B$ sabendo que as coordenadas de u em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$ são $(1, -2, 1)$.

3. Determine uma base ortonormal de W e uma base ortonormal de $W^\perp$, onde W é o subespaço do $\mathbb{R}^4$ dado por:

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \ \text{ e } \ 2x + z = y\}$$

4. Considere o subespaço vetorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ y - 2x = 0\ \}$ com o produto interno $\langle (x, y, z), (w, t, r) \rangle = 2xw + 3yt + zr$. Determine $S^\perp$, uma base e sua dimensão.

5. Seja o operador $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (4x, 6z - y, y)$.
   (i) Ache todos os autovalores e uma base de cada autoespaço do operador T.
   (ii) Existe uma base de $\mathbb{R}^3$ que diagonalize o operador T ? Por quê?