UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEPTO. DE MATEMÁTICA

Avaliação de Álgrebra Linear - Professor Luiz Carlos Matioli

PROCEDIMENTOS:

Você deverá fazer todos os itens propostos.

A prova é individual, sem consulta e não é permitido o uso de calculadoras.

Respostas sem as devidas justificativas não serão consideradas.

O tempo de duração da prova é 90 minutos.

Os números entre parênteses, nos finais das questões, são seus respectivos valores e a nota máxima é 10 pontos.

1. (a) Mostre que, quaiquer que sejam u e v em um espaço vetorial munido de um produto intermo,
$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2. \qquad (1,0)$$
(b) Mostre que, com o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$, vale a igualdade dada no item (a), deste exercício, para $u = (1,1,0)^T$ e $v = (0,-1,1)^T$. (1,0)

2. Considere o espaço vetorial $C[0,1]$ munido do produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ e S o subespaço gerado pelos vetores 1 e $2x-1$.
(a) Mostre que 1 e $2x-1$ são ortogonais. (0,5)
(b) Determine $||1||$ e $||2x-1||$. (1,0)
(c) Verifique a validade do Teorema de Pitágoras. (1,0)

3. Sabe-se que os autovalores de uma matriz $A_{2\times 2}$ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -4$ e que $v_1 = (3,1)^T$ é um autovetor associado à $\lambda_1 = 1$ e $v_2 = (1,2)^T$ é um autovetor associado à $\lambda_2 = -4$. Pede-se:
(a) O traço da matriz A. (0.5)
(b) O determinante da matriz A. (0,5)
(c) Utilizando diagonização encontre a matriz A (lembrete: $A = XDX^{-1}$). (1,0)
(d) Utilizando diagonalização determine a inversa da matriz A. (0,5)
(e) Utilizando diagonalização explique como obter A^{10}. (0,5)

4. (a) Utilize o processo de Gram-Schimidt para encontrar uma base ortonormal para o espaço coluna de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (1,0)
(b) Fatore A em um produto QR, onde as colunas de Q formam um conjunto ortonormal de vetores e R é uma matriz triangular superior. (1,0)
(c) Resolva o problema de mínimos quadrados para $Ax = b$, sendo $b = [0,2,1]^T$ e a matriz A dada no item (a) deste exercício. (1,0)

Boa prova.