UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - DEP. DE MATEMÁTICA
Avaliação de Álgrebra Linear
Prof. Luiz Carlos Matioli

PROCEDIMENTOS - LEIA COM ATENÇÃO:
A prova é individual, sem consulta e não é permitido o uso de calculadoras.
O tempo de duração da prova é 90 minutos.
A interpretação das questões faz parte da avaliação.
Respostas sem as devidas justificativas não serão consideradas.
A nota máxima da prova é 10 pontos.

1. Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   (i) Use o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal para o espaço coluna da matriz A. (1.0)

   (ii) Fatore A em um produto QR, onde as colunas de Q formam um conjunto ortonormal de vetores e R é uma matriz triangular superior. (1.0)

   (iii) Resolva o problema de mínimos quadrados para $Ax = b$. (1.0)

2. Considere $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

   (i) Determine os autovalores de A. (1.0)

   (ii) Determine os autoespaços associados aos autovalores encontrados no item (i) deste exercício. (1.0)

   (iii) Encontre uma matriz X e uma matriz diagonal D tal que $A = XDX^{-1}$. (1.0)

   (iv) Mostre que $A^3 = XD^3X^{-1}$. (0.5)

3. (i) Mostre que os autovalores de uma matriz triangular $A_{n\times n}$ são os elementos diagonais de A. (1.0)

   (ii) Seja $A_{n\times n}$ uma matriz inversível e seja λ um autovalor não nulo de A. Mostre que $1/\lambda$ é um autovalor de A^{-1}. (NOTA: $Av = \lambda v$ e $AA^{-1} = I_{n\times n}$) (1.0)

   (iii) Considere A a matriz dada no exercício 2 anterior. Determine os autovalores de A^{-1}. (0.5)

4. Considere o espaço vetorial $C[-1,1]$ com produto interno $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ e norma $||f|| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$

   (a) Mostre que 1 e x são ortogonais. (0.5)

   (b) Determine $||1||$ e $||x||$ e verifique a validade do Teorema de Pitágoras. (1.0)

BOA PROVA!