UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Exame final de Álgebra Linear - Professor Luiz Carlos Matioli

1. (valor 3,5) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

   (a) Mostre que A é inversível. (b) Calcule $\det(A)$ e $\det(A^{-1})$.

   (c) Calcule $\det(10A)$ e $\det(\sqrt{2}A^{-1})$. (d) Calcule $\det(A^2)$

   (d) Resolva $Ax = b$, com $b = (4, 2, 3, 6)^T$.

   (e) Determine o núcleo da matriz A. (nota: $\det(A)\det(A^{-1})=1$)

2. (valor 1,0) Sejam $x = (-1, -1, 1, 1)^T$, $y = (1, 1, 5, -3)^T$ e o produto interno usual, ou seja $\langle x, y\rangle = x^T y$. Mostre que $x \perp y$ (x é ortogonal a y). Calcule $\|x\|_2$, $\|y\|_2$, $\|x+y\|_2$ e verifique a validade do teorema de Pitágoras.

3. (valor 1,0) Verifique se os vetores $x_1 = (2, 1, 3)^T$, $x_2 = (3, -1, 4)^T$ e $x_3 = (2, 6, 4)^T$ são LD ou LI e determine a dimensão de $[\{x_1, x_2, x_3\}]$.

4. (valor 1,0) Verifique se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1 + x_2)^T$ é uma transformação linear.

5. (valor 1,0) Dado que $S = \{(1, 1, 1)^T, (2, 1, -3)^T, (4, -5, 1)^T\}$ é um conjunto ortogonal em $\mathbb{R}^3$ com relação ao produto interno usual. Determine uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^3$.

6. (valor 1,5) Use Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal para os vetores formados pelas colunas da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. (valor 1,0) Determine os autovalores e os auto-espaços correspondentes (subespaços gerado pelos autovetores) da matriz dada por $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

BOA PROVA!