CE-003: Estatística II, 3a Prova - 2o semestre 2011 (24/11/2011)

1. Um tubo de PVC é fabricado com diâmetro médio de 1,01 polegadas e um desvio padrão de 0,03 polegadas. Escolhendo um tubo ao acaso qual a probabilidade de que tenha:

   (a) menos de 1 polegada;
   (b) no máximo 1,05 polegadas;
   (c) entre 1,005 e 1,015 polegadas.

   Tomando-se uma amostra de $n = 10$ tubos, qual a probabilidade que:

   (d) o diâmetro médio seja maior que 1,009 e menor que 1,012;
   (e) a soma dos diâmetros exceda 10,05 polegadas;
   (f) a soma dos diâmetros esteja entre 10,05 e 10,15.

   Solução:

$$X : \text{diâmetro do tubo de PVC (mm)}$$
$$X \sim N(\mu = 1{,}01, \sigma_X^2 = 0{,}03^2)$$

   (a) $P[X < 1] = P[Z < \frac{1-1,01}{0,03}] = P[Z < -32,667] = 0,3694$
   (b) $P[X < 1,05] = P[Z < \frac{1,05-1,01}{0,03}] = P[Z < 1,333] = 0,9088$
   (c) $P[1,005 < X < 1,015] = P[\frac{1,005-1,01}{0,03} < Z < \frac{1,015-1,01}{0,03}] = P[-0,167 < Z < 0,167] = 0,1324$

$$\overline{X}_{10} \sim N(\mu = 1{,}01, \sigma_{\overline{X}}^2 = 0{,}03^2/10)$$
$$\text{ou } S_{10} = \sum_{i=1}^{10} x_i \sim N(\mu = 10{,}1; \sigma^2 = 10 \cdot 0{,}03^3)$$

   (d) $P[1,009 < \overline{X} < 1,012] = P[\frac{1,009-1,010}{0.03/\sqrt{10}} < Z < \frac{1,012-1,010}{0.03/\sqrt{10}}] = P[-0,105 < Z < 0,211] = 0,1255$
   (e) $P[\sum_{i=1}^{10} X_i > 10,5] = P[\overline{X} > 1,005] = P[Z > \frac{1,005-1,010}{0,03/10}] = P[Z > -0,527] = 0,7009$
   (f) $P[10,05 < \sum_{i=1}^{10} X_i < 10,15] = P[1,005 < \overline{X} < 1,015] = P[\frac{1,005-1,010}{0,03/\sqrt{10}} < Z < \frac{1,015-1,010}{0,03/\sqrt{10}}] = P[-0,527 < Z < 0,527] = 0,4018$

```
> # a)
> pnorm(1, m=1.01, sd=0.03)

[1] 0,3694

> # b)
> pnorm(1.05, m=1.01, sd=0.03)

[1] 0,9088

> # c)
> diff(pnorm(c(1.005,1.015), m=1.01, sd=0.03))

[1] 0,1324

> # d)
> diff(pnorm(c(1.009,1.012), m=1.01, sd=0.03/sqrt(10)))

[1] 0,1255

> # e)
> pnorm(1.005, m=1.01, sd=0.03/sqrt(10), lower=FALSE)

[1] 0,7009

> # f)
> diff(pnorm(c(1.005,1.015), m=1.01, sd=0.03/sqrt(10)))

[1] 0,4018
```

---

2. Uma peça é produzida com um atributo de interesse seguindo uma distribuição normal de média 100 e variância 25. Amostras serão tomadas periodicamente para monitorar o processo. Qual deve ser o tamanho mínimo das amostras para que a média seja estimada com erro padrão de 1,5 unidades?

   Solução:

$$X : \text{atributo de interesse}$$
$$X \sim N(\mu = 100, \sigma_X^2 = 25)$$
$$\overline{X}_n \sim N(\mu = 100, \sigma_{\overline{X}}^2 = 25/n)$$
$$\text{erro padrão} : \sigma_{\overline{X}=\sigma_X/\sqrt{n}} = 1{,}5$$
$$n = \lceil \sigma_X^2/1{,}5^2 = 12$$

---

3. Um fabricante produz anéis de piston para automóveis. O processo produz anéis com diâmetro aproximadamente normal com desvio padrão de 0,001 mm. Uma amostra de 15 anéis mostrou um diâmetro médio de 74,036 mm.

   (a) Encontre intervalos de confiança a 90, 95 e 99% para o valor médio do diâmetro dos anéis.

   O processo deve produzir anéis com diâmetro médio de 74,03 mm. Determina-se que se a média das amostras (n = 15) estiver mais que 0,005 unidades afastada desta média, o processo é interrompido para inspeção e ajustes.

   (b) Com esta "regra", qual a probabilidade de interromper o processo desnecessariamente?
   (c) Com a amostra dada o processo é interrompido. Qual a probabilidade dessa decisão ter sido equivocada?
   (d) Qual deveria ser a "regra" para interrupção do processo para que a probabilidade de uma parada desnecessária não fosse superior a 0,01?

   Solução:

$$X \text{ : diâmetro dos anéis}$$
$$X \sim N(\mu, \sigma^2 = 0{,}001^2)$$
$$\text{amostra : } n = 15 \quad \overline{x} = 74{,}036$$

(a)

$$IC_{1\text{-}\alpha}(\mu) \;:\; \overline{x} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
$$IC_{90\%}(\mu) \;:\; 74{,}036 \pm 1{,}6449\frac{0,001}{\sqrt{15}} \longrightarrow (74{,}0356;74{,}0364)$$
$$IC_{95\%}(\mu) \;:\; 74{,}036 \pm 1{,}96\frac{0,001}{\sqrt{15}} \longrightarrow (74{,}0355;74{,}0365)$$
$$IC_{99\%}(\mu) \;:\; 74{,}036 \pm 2{,}5758\frac{0,001}{\sqrt{15}} \longrightarrow (74{,}0353;74{,}0367)$$

(b) $P[|\overline{X}_{15} - \mu| > 0{,}005 | \mu = 74{,}03] = 2 \cdot P[Z > \frac{0{,}005}{0{,}001/\sqrt{15}}] = 0$

(c) $P[\overline{X}_{15} \geq 74{,}036 | \mu = 74{,}03] = P[Z > \frac{74{,}036-74{,}03}{0{,}001/\sqrt{15}}] = P[Z > 23{,}238] = 0$

(d) $P[|\overline{X}_{15} - \mu| > k | \mu = 74{,}03] = 0{,}01 \longrightarrow z = 2{,}576 = \frac{k}{0{,}001/\sqrt{15}} \longrightarrow k = 0{,}00067$

---

4. Uma amostra aleatória de 50 capacetes foi submetida a testes de impacto e em 18 deles algum dano relevante foi observado.

   (a) Encontre um intervalo de confiança (95%) para a proporção p de capacetes verdadeira (populacional).
   (b) O capacete é considerado aceitável se a proporção p é menor que 0,40 (40%). Use um teste de hipótese adequado para decidir (α = 0,01) se esse capacete é aceitável.
   (c) Usando a estimativa da proporção obtida na amostra como sendo o verdadeiro valor da proporção p, calcule um novo tamanho de amostra de capacetes a serem testados para que a verdadeira proporção seja estimada com uma margem de erro de 0,025.
   (d) Quanto deveria ser o novo tamanho da amostra no item anterior para que a margem de erro fosse de no máximo 0,025 independentemente do valor da verdadeira proporção?

   Solução:

$$X \text{ : defeito}$$
$$X \sim Ber(p)$$
$$\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$$
$$n = 50 \quad \hat{p} = 18/50 = 0{,}36$$

(a) IC assintótico:

$\hat{p} \pm z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \longrightarrow 0{,}36 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}36\cdot(1-0{,}36)}{50}} \longrightarrow 0{,}36 \pm 0{,}133 \longrightarrow (0{,}227, 0{,}493)$

ou para IC conservador:

$0{,}36 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{1}{4\cdot 50}} \longrightarrow 0{,}36 \pm 0{,}139 \longrightarrow (0{,}221, 0{,}499)$

(b)

$$H_0 \;:\; p \geq 0{,}40 \text{ (não aceitável)} \quad vs \quad H_0 : p < 0{,}40 \text{ (aceitável)}$$
$$\alpha = 0{,}01 \qquad RC : \{z > \text{-}2{,}326\}$$
$$z_c = \frac{0,36 - 0,40}{\sqrt{\frac{0{,}40(1-0{,}40)}{50}}} = \text{-}0{,}577$$
$$\text{valor-p} = 0{,}28185$$

Conclusão: $z_c \notin RC$ ou valor-p > α(0,01). Não rejeita-se H_0 para o nível de significância de 1%, ou seja, não há evidências suficientes de que a proporção seja inferior a 40% e o capacete é considerado não aceitável.

(c)

$z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}025 \longrightarrow n = \lceil \frac{z^2\hat{p}(1-\hat{p})}{0{,}025^2} = \lceil \frac{1{,}96^2(0{,}36)(0{,}64)}{0{,}025^2} = 1417$

(d)

$z\sqrt{\frac{1}{4n}} = 0{,}025 \longrightarrow n = \lceil \frac{z^2}{4\cdot 0{,}025^2} = \lceil \frac{1{,}96^2}{4\cdot 0{,}025^2} = 1537$

---

5. Estimação e estimadores:

   (a) encontre a expressão do estimador de mínimos quadrados the β no modelo para uma v.a. Y em que $y_i = \beta x_i + \epsilon_i$.
   (b) encontre a expressão do estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro λ da distribuição de Poisson. Encontre a estmativa de λ para uma amostra que forneceu os seguintes valores:

9 15 13 10 9 8 7 5 6 8 9

Solução:

(a)

$$Q(\beta) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}Q(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n (-2x_i)(y_i - \hat{\beta} x_i) = 0 \longrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(b)

$$X \sim P(\lambda)$$

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$l(\lambda) = \log \prod_{i=1}^n P[X = x_i] = \sum_{i=1}^n \log \{P[X = x_i]\} =$$

$$= \sum_{i=1}^n (-\lambda + x_i \log(\lambda) - \log(x_i!)) = -n\lambda + \log(\lambda) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \log(x_i!)$$

$$\frac{\mathrm{d}l(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \longrightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\hat{\lambda}} = 0 \longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

Para os dados da amostra a estimativa é:

$$\bar{x} = 9$$