CE-003: Estatística II - Turma: K/O, 1^a Prova (19/12/2012)

GRR: ______________ **Nome:** ______________________________________ **Turma:** ___

1. A probabilidade de haver algum acidente considerado grave em um dia, em um trecho de uma rodovia é de 0,04 se não chove e de 0,12 se chove. Sabe-se que, no período considerado, chove em 30% dos dias.

   (a) Se em um determinado dia não houve nenhum acidente, qual a probabilidade que não tenha chovido?

   (b) qual a probabilidade de que, chovendo ou não, haja acidente?

Solução:
Eventos e probabilidades informadas:

$$\begin{aligned}
&A : \text{ocorre acidente} \quad \overline{A} : \text{não ocorre acidente}\\
&C : \text{chove} \quad \overline{C} : \text{não chove}\\
&P[A|\overline{C}] = 0,04 \longrightarrow P[\overline{A}|\overline{C}] = 1 - 0,04 = 0,96\\
&P[A|C] = 0,12 \longrightarrow P[\overline{A}|C] = 1 - 0,12 = 0,88\\
&P[\overline{C}] = 0,30 \longrightarrow P[\overline{C}] = 1 - 0,30 = 0,70
\end{aligned}$$

(a) $P[\overline{C}|\overline{A}] = \frac{P[\overline{C}\cap\overline{A}]}{P[\overline{A}]} = \frac{P[\overline{C}\cap\overline{A}]}{P[C\cap\overline{A}]+P[\overline{C}\cap\overline{A}]} = \frac{P[\overline{C}]\cdot P[\overline{A}|\overline{C}]}{P[\overline{C}]\cdot P[\overline{A}|\overline{C}]+P[C]\cdot P[\overline{A}|C]} = \frac{0{,}70\cdot 0{,}96}{0.70\cdot 0{,}96+0{,}30\cdot 0{,}88} = 0.718$

(b) $P[A] = P[A\cap C] + P[A\cap\overline{C}] = P[C]\cdot P[A|C] + P[\overline{C}]\cdot P[A|\overline{C}] = 0,30\cdot 0,12 + 0,70\cdot 0,04 = 0.064$

---

2. Considere agora que ocorrem em média 0,8 acidentes graves por semana.

   (a) Com a informação disponível, qual distribuição de probabilidades (dentre as vistas no curso) poderia ser adequada para descrever *o número de acidentes semanais na rodovia*? Justifique a sua resposta e mencione quais as suposisões que devem ser feitas ao adotar esta distribuição.

   (b) Qual a probabilidade de que haja ao menos um acidente grave em uma semana?

   (c) Qual a probabilidade de que não haja acidentes graves em um mês?

   (d) Qual a probabilidade de que sejam registrados mais que dois acidentes graves em uma semana?

   (e) Qual a probabilidade de que não haja mais do que cinco acidentes graves em um mês?

   (f) Sabendo que em um mês houve pelo menos um acidente grave, qual a probabilidade de que ocorram mais que quatro?

   (g) Se não houveram acidentes graves até a metade do mês, qual a probabilidade de não haja acidentes no restante do mês.

   (h) E se já ocorreu algum acidente na primeira metade do mês?

Solução:

$$X: \text{o número de acidentes semanais na rodovia}$$

(a) $X \sim P(\lambda = 0,8)$, assumindo-se que os acidentes ocorrem segundo um processo de Poisson, portanto, de forma independente (ocorrência de um acidente não influencia a probabilidade de ocorrência de outro).

(b) $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \frac{e^{-0,8}0,8^0}{0!} = 0.5507$.

(c)

$$Y: \text{o número de acidentes } \textbf{mensais} \text{ (supondo mês de 30 dias) na rodovia}$$
$$Y \sim P(\lambda = \frac{30}{7} \cdot 0,8 \approx 3,43)$$
$$P[Y = 0] = \frac{e^{-3.43}3.43^0}{0!} = 0.0324$$

(d) $P[X > 2] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^{2} P[X = i] = 0.0474$

(e) $P[Y \leq 5] = \sum_{i=0}^{5} P[Y = i] = 0.8667$

(f) $P[Y > 4|Y \geq 1] = \frac{P[Y>4 \cap Y \geq 1]}{P[Y \geq 1]} = \frac{P[Y>4]}{P[Y \geq 1]} = \frac{1-P[Y \leq 4]}{1-P[Y=0]} = 0.2702$.

(g) Pelas propriedades do processo de Poisson os eventos são independentes e portanto a probabilidade de acidentes na segunda metade independe da ocorrência na primeira metade. Logo,

$$Y_1: \text{o número de acidentes na primeira metade do mês na rodovia}$$
$$Y_2: \text{o número de acidentes na segunda metade do mês na rodovia}$$
$$Y_1 \text{ e } Y_2 \sim P(\lambda = \frac{15}{7} \cdot 0,8 \approx 1,71)$$
$$P[Y_2|Y_1] = P[Y_2]$$
$$P[Y_2 = 0|Y_1 = 0] = P[Y_2 = 0] = \frac{e^{-1,71}1,71^0}{0!} = 0.1809$$

(h) $P[Y_2 = 0|Y_1 \geq 0] = P[Y_2 = 0] = \frac{e^{-1,71}1,71^0}{0!} = 0.1809$.

---

3. Ainda no contexto da questão anterior:

(a) Qual distribuição poderia ser usada para descrever o tempo entre acidentes graves?

(b) Qual a probabilidade de se passarem 10 dias sem acidentes graves?

(c) Qual o tempo médio entre acidentes graves?

(d) Se não houve acidentes por um período de 5 dias consecutivos, qual a probabilidade de haver um acidente nos próximos 10 dias?

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} T &: \text{Tempo (em dias) entre acidentes} \\ T &\sim \text{Exp}(\theta = 0,8/7) \\ f(t) &= \frac{0,8}{7}\exp\{-\frac{0,8}{7}t\} \\ F(t) &= 1 - \exp\{-\frac{0,8}{7}t\} \end{aligned}$$

(b) $P[T > 10] = 1 - F(10) = 0.319$

(c) $\text{E}[T] = \frac{1}{\theta} = 7/0,8 = 8.75$ dias

(d) $P[T < 15|T > 5] = P[T < 10] = 0.681$

---

4. Um mecanismo robótico de inserção contém 10 componentes primários. A probabilidade de que qualquer um dos componentes falhe durante o período de garantia é de 0,03. Assume que as falhas dos componentes são independentes e o mecanismo falha se qualquer um dos componentes falharem.

   (a) Qual a probabilidade de que o mecanismo falhe durante o período de garantia?

   (b) Qual deveria ser a probabilidade individual de falha dos componentes para que a probabilidade de falha do mecanismo não ultrapassasse 0,05?

Solução:

$$\begin{aligned} \text{Evento } F_i :&\ \text{falha do i-ésimo componente} \quad P[F_i] = 0,03 \longrightarrow P[\overline{F}_i] = 0,97 \\ \text{Evento } M :&\ \text{falha do mecanismo} \end{aligned}$$

(a) $P[M] = 1 - \prod_{i=1}^{10} P[\overline{F}_i] = 1 - 0,97^{10} = 0.2626$

(b) $0,05 = 1 - \{P[\overline{F}_i]\}^{10} \longrightarrow P[\overline{F}_i] = (1 - 0,05)^{1/10} = 0.9949 \longrightarrow P[F_i] = 1 - P[\overline{F}_i] = 0.0051$

---

5. Seja a função de densidade de probabilidade dada por $f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x)$. Obtenha:

   (a) o valor de C,

   (b) $P[X > 0,5]$,

   (c) $P[X > 0,7|X > 0,5]$,

   (d) $E(X)$,

   (e) o terceiro quartil.

Solução:

$$f(x) = Cx^2 I_{[0,4]}(x) \longrightarrow F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{C}{3}x^3 I_{[0,4]}(x)$$

(a) $\int_0^4 f(x)\text{dx} = 1 \longrightarrow \text{C} = 3/64$

(b) $P[X > 0,5] = 1 - F(0,5) = 0.998$

(c) $P[X > 0,7|X > 0,5] = \frac{1-F(0,7)}{1-F(0,5)} = 0.997$

(d) $E(X) = \int_0^4 x \cdot f(x)\mathrm{dx} = \ldots = 3$

(e) $q_3 : \int_0^{q_3} f(x)\mathrm{d}x = 0,75 \longrightarrow q_3 = (64 \cdot 0,75)^{1/3} = 3.63$

---

6. Uma editora envia livros de divulgação com caixas com três unidades. O peso individual dos livros tem distribuição normal de média 400 gramas e desvio padrão de 60 gramas e a caixa pesa 200 gramas. Se os livros são escolhidos ao acaso, calcule:

(a) a probabilidade de que uma caixa a ser enviada pese mais que 1,5 quilos;

(b) o custo esperado para envio de 1.000 caixas sabendo-se que paga-se R\$5,00 para caixas acima de 2,0 quilos, R\$3,00 para caixas entre 1,0 e 2,0 quilos, e R\$ 2,00 para caixa abaixo de 1,0 quilo.

Solução:

$$\begin{aligned}
X_A &: \text{peso do livro} \quad ; \quad X_A \sim N(400, 60^2) \\
X_B &: \text{peso da embalagem} \quad ; \quad X_B = 200 \\
X_C &: \text{peso da caixa com 3 livros} \quad ; \quad X_B \sim N(\mu_c = E(X_C), \sigma_c^2 = V(X_c)) \\
E(X_c) &= E(3X_A + 200) = 3E(X_A) + 200 = 1400 \quad ; \quad V(X_c) = 3^2V(X_a) = 3^2 60^2
\end{aligned}$$

(a) $P[X_c > 1500] = P[Z > \frac{1500-1400}{180}] = P[Z > 0.56] = 0.2893$

(b)

C : custo por caixa

c	2,00	3,00	5,00
$P[C = c]$	$p_1 = P[X_c < 1000]$	$p_2 = P[1000 \leq X_c < 2000]$	$p_3 = P[X_c \geq 2000]$

$$p_1 = P[X_c < 1000] = P[Z < \frac{1000 - 1400}{180}] = P[Z < -2.22] = 0.0131$$

$$p_2 = P[1000 \geq X_c < 2000] = P[\frac{1000 - 1400}{180} < Z < \frac{2000 - 1400}{180}] = P[-2.22 < Z < 3.33] = 0.$$

$$p_3 = P[X_c \geq 20000] = 1 - p_1 - p_2 = 4e - 04$$

$$1000 \cdot E[C] = 2,00p_1 + 3,00p_2 + 5,00p_3 = 2987.72$$
