Departamento de Informática - UFPR

Segunda prova - RESPOSTAS

Algoritmos e Teoria dos Grafos - CI065 - 2010/2

Prof. André Luiz Pires Guedes

24 de novembro de 2010

PROVA SEM CONSULTA

A prova tem duração de 1:30 horas.

A interpretação faz parte da prova. Pode fazer a lápis (contanto que seja possível ler). Pode ficar com a folha de questões.

Dado : um grafo conexo G com pesos nas arestas.
Devolve: árvore geradora de custo mínimo T.

1 escolha $v \in V(G)$;
2 $S \leftarrow \{v\}$;
3 $A \leftarrow \emptyset$;
4 **enquanto** $S \neq V(G)$ **faça**
5   escolha $\{u, w\} \in E(S, \overline{S})$ de peso mínimo no corte, com $u \in S$;
6   insira $\{u, w\}$ em A;
7   insira w em S;
8 devolva $T = (S, A)$.

Algoritmo 1: Prim(G).

(20pts) **1.** Apresente (desenhando ou descrevendo) todas as árvores (não-isomorfas) com 6 vértices.

R. Apenas 5 diferentes vetores de graus, mas 6 árvores diferentes:

1. $(1, 1, 2, 2, 2, 2)$
   uma árvore que é um caminho com os 6 vértices;

2. $(1, 1, 1, 2, 2, 3)$
   duas árvores, uma delas é um caminho com 5 vértices e o sexto vértice está conectado com o segundo no caminho; a outra é o mesmo caminho com 5 vértices mas o sexto vértice está conectado com o terceiro no caminho;

3. $(1, 1, 1, 1, 3, 3)$
   uma árvore onde os vértices de grau 3 são vizinhos e cada um tem 2 vértices de grau 1 como vizinhos;

4. $(1, 1, 1, 1, 2, 4)$
   uma árvore onde o vértice de grau 4 tem um de seus vizinhos de grau 2;

5. $(1, 1, 1, 1, 1, 5)$
   uma árvore, um vértice ligado aos demais.

(20pts) **2.** Considerando o algoritmo 1, prove que (S, A) é uma sub-árvore de alguma árvore geradora mínima de G sempre que a linha 4 é executada.

R. O par (S, A) é uma árvore, já que as arestas entram em A se conectando com o vértice novo de S, logo não forma ciclo, e o número de arestas é sempre um a menos que o número de vértices.

Seja S_i, e A_i os valores de S e A na i-ésima vez que a linha 4 é executada.

Por indução, (base) para $i = 1$, $S_1 = \{v\}$ e $A = \emptyset$, o que faz com que (S_1, A_1) seja sub-árvore de qualquer árvore geradora mínima de G.

Suponha que (hipótese) para $i = k$, para um certo $k >= 1$, (S_k, A_k) é sub-árvore de uma árvore geradora mínima T^*.

Após a $(k + 1)$-ésima execução, $S_{k+1} = S_k \cup \{u\}$ e $A_{k+1} = A_k \cup \{e\}$, onde $e = \{u, w\}$, e u e w são escolhidos pelo algoritmo.

Se e é uma aresta de T^* então (S_{k+1}, A_{k+1}) é sub-árvore de alguma árvore geradora mínima de G.

Se e não é uma aresta de T^*, o grafo $T^* + e$ tem um ciclo. Como este ciclo passa por u e w, sendo que $u \in \overline{S_k}$ e $w \in S_k$, este ciclo possui pelo menos uma outra aresta no corte $E(S_k, \overline{S_k})$, além de e. Seja f esta outra aresta.

Como o algoritmo escolheu e tendo f como uma das opções (arestas do corte) o peso de e deve ser menor ou igual ao peso de f $(c(e) \leq c(f))$. O grafo $T' = T^* + e - f$ é uma árvore geradora de G de peso igual a $c(T^*) + c(e) - c(f)$. Como $T*$ é mínima, $c(T^*) \leq c(T^*) + c(e) - c(f)$, e portanto $c(f) \leq c(e)$. Logo, $c(f) = c(e)$ e T' é uma árvore geradora mínima de G. Assim, (S_{k+1}, A_{k+1}) é sub-árvore de uma árvore geradora mínima de G.

(20pts) **3.** Prove que se um grafo bipartido $G = (A \cup B, E)$, de partes A e B, tem um emparelhamento M que cobre A então para todo $S \subseteq A$, $|N(S)| \geq |S|$. Onde $N(S)$ é a união das vizinhanças de cada vértice de S.

R. Um emparelhamento M em G que cobre A induz uma função $f : A \rightarrow B$ defina por $f(a) = b$ onde $\{a, b\} \in M$.

A função f deve ser injetora, já que se existem $x, y \in A$, distintos, são tais que $f(x) = f(y) = z$ então existem arestas $\{x, z\}$ e $\{y, z\}$ em M e M não seria um emparelhamento.

Se existe $S \subseteq A$ tal que $|N(S)| < |S|$, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos 2 vértices de S teriam o mesmo valor de f, e f não seria injetora. Logo, não pode existir $S \subseteq A$ tal que $|N(S)| < |S|$.

(20pts) **4.** Dado um grafo G, o grafo linha de G é o grafo $L(G) = (E(G), A)$ onde $A = \{\ \{a, b\} \mid a \cap b \neq \emptyset\}$. Sabendo que $\Delta(G)$ é o grau máximo de G e que $\omega(G)$ é o tamanho da maior clique de G. Prove, ou apresente um contra-exemplo, que para todo grafo G, $\omega(L(G)) \leq \Delta(G)$.

R. Contra-exemplo: G é um triângulo. $L(G)$ também é um triângulo. $\Delta(G) = 2$ e $\omega(L(G)) = 3$.

(20pts) **5.** Um grafo G é Hamiltoniano se existe um ciclo em G que passa por todos os vértices (sem repetições). Um grafo G é Euleriano se existe um passeio fechado em G que passa por todas as arestas (sem repetições). Usando a definição de grafo linha da questão anterior, prove, ou apresente um contra-exemplo, que um grafo G é euleriano se, e somente se, $L(G)$ é hamiltoniano.

R. (=>)

Vamos provar que se G é euleriano então $L(G)$ é hamiltoniano.

Se G é euleriano então existe um passeio fechado $P = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ que passa por todas arestas de G sem repetições, voltando ao vértice inicial. Considere a sequência $C = (\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_i, v_{i+1}\}, \ldots, \{v_k, v_1\}, \{v_1, v_2\})$. Como cada aresta de G é um vértice de $L(G)$ e cada aresta consecutiva em C tem um vértice em comum, C é um ciclo hamiltoniano em $L(G)$. Logo se G é euleriano então $L(G)$ é hamiltoniano.

(<=)

Existe um contra-exemplo para a volta.

Seja G o grafo com 4 vértices, sendo um deles com grau 3 e os demais com grau 1. $L(G)$ é um triângulo. $L(G)$ é hamiltoniano, mas G não é euleriano.