DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UFPR.
CM046 Introdução à Álgebra - A3b
Curitiba, 25 de junho de 2015.

Terceira Avaliação

(*) **Problema (01).** Mostre, usando indução matemática, que a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisfaz $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

√ **Problema (02).** Se B_1 e B_2 são anéis, o conjunto $B_1 \times B_2 = \{(x,y); x \in B_1, y \in B_2\}$ munido das operações de adição e multiplicação definidas, respectivamente, por: $(x,y)+(s,t)=(x+s,y+t)$; $(x,y)\cdot(s,t)=(xs,yt)$, $x,s \in B_1$ e $y,t \in B_2$ é um anel chamado *produto direto* de B_1 por B_2. Mostre que:

(a). Se 0_1 e 0_2 são, respectivamente, os elementos neutros das adições em B_1 e B_2, o par $(0_1, 0_2)$ é o elemento neutro da adição no produto direto $B_1 \times B_2$.
(b). Se B_1 e B_2 são anéis comutativos, o produto direto $B_1 \times B_2$ também é um anel comutativo.
(c). Se B_1 e B_2 são anéis unitários, o produto direto $B_1 \times B_2$ também é unitário.
(d). Se B_1 e B_2 são anéis de integridade, o produto direto $B_1 \times B_2$ não é um anel de integridade.

√ **Problema (03).** (a). Mostre que $\{3x+8y;\ x,y \in \mathbb{Z}\}$ é um subanel de $\mathbb{Z}$.
(b). Determine os subanéis de $\mathbb{Z}_{12}$.

Problema (04). Mostre que $U_2(\mathbb{Z})$, o conjunto das matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ é um subanel de $M_2(\mathbb{Z})$.

Problema (05). Resolver o sistema de congruências em $\mathbb{Z}_7$; $\begin{cases} x+2y & \equiv & 0 \\ x+y & \equiv & 5\,. \end{cases}$

√ **Problema (06).** Considere o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x,y); x,y \in \mathbb{Z}\}$ munido das operações de adição e multiplicação definidas, respectivamente, por:
$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$; $\qquad (a,b) \odot (c,d) = (ac+bd, ad+bc)$, $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z}$.
Mostre que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ é um anel.

Problema (07). Seja $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o anel do problema 06 e considere a aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to M_2(\mathbb{Z})$ que, a cada par ordenado $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, faz corresponder a matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{Z})$. Mostre que φ é um homomorfismo de anéis e que φ é injetivo.