

Introdução à Álgebra (Agosto 2013)

- Prof. Edson Ribeiro Alvares

Instruções:

- a) Cada questão escolhida vale 2,5 pontos. A prova tem um total de 10,0 pontos;
- b) Faça apenas quatro questões.
- c) Faça a primeira questão na primeira página, a segunda na segunda página, etc.
- d) Justifique todas as suas respostas.

Nome do aluno:

Questões

- (1) Verifique se o conjunto \mathbb{Q} sem o zero, com a operação $a*b = ab/2$ é um grupo abeliano.
- (2) Mostre que um homomorfismo $\phi : G \rightarrow G'$, onde $|G|$ é primo, é o homomorfismo trivial (isto é, $\phi(x) = e$ para todo $x \in G$, onde e é o neutro do grupo G') ou é um homomorfismo injetor.
- (3) Se o quociente e o resto da divisão de um certo número natural por 37 são, respectivamente q e 35, quais serão o quociente e o resto da divisão do dobro deste número por 37.
- (4) Sejam a e b inteiros positivos tais que $\text{mdc}(a, b) = p$, p primo. Quais são os possíveis valores de $\text{mdc}(a^2, b)$, $\text{mdc}(a^3, b)$ e $\text{mdc}(a^2, b^3)$?
- (5) Seja $H = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 2^k, k \in \mathbb{Z}\}$.
 - (a) Mostre que H é subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$.
 - (b) Mostre que H é subgrupo normal de $GL_2(\mathbb{R})$.Lembre que $GL_2(\mathbb{R})$ é o grupo das matrizes 2×2 com determinante diferente de zero.