Primeira Prova de Matemática Discreta

1o. semestre de 2004

1. **Justifique** todas as suas respostas.
2. **A duração da prova é de 2 horas.**
3. **A prova pode ser respondida a lápis.**
4. Não precisa devolver a folha de questões.
5. **Entender o enunciado das questões faz parte da prova.**
6. **Não pode (nem precisa) usar calculadora.**
7. **Cola:**

	sem repetição	com repetição
Seleção	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$
Arranjo	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
Permutação	$n!$	$\frac{n!}{k_1!\cdots k_r!}$

8. **Boa prova.**

1. (2 PONTOS) Formule o seguinte problema em termos de soluções inteiras de equação e em termos de distribuição de bolas em caixas: *Seleção de* 20 *refrigerantes de* 4 *tipos com número par de cada tipo e não mais que oito refrigerantes do mesmo tipo.*

R Seja X_i o número de refrigerantes selecionados do tipo i. Uma seleção de 20 refrigerantes de 4 tipos com número par de cada tipo e não mais que oito refrigerantes do mesmo tipo corresponde a uma solução de

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 20 \text{ com } X_i \in \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Considerando 4 caixas distintas, uma pra cada tipo de refrigerante, e 20 bolas idênticas uma seleção de 20 refrigerantes de 4 tipos com número par de cada tipo e não mais que oito refrigerantes do mesmo tipo corresponde a distribuir as bolas nas caixas de maneira que cada caixa receba um número par menor ou igual a 8 de bolas.

2. (1 PONTO) Determine o erro na seguinte prova por indução. Prova de $6n = 0$ para todo $n \geqslant 0$.

Base. Se $n = 0$ então $6n = 0$.

Passo. Suponha que $6k = 0$ para todo $0 \leqslant k < n$. Tome $a, b < n$ números naturais tais que $n = a + b$. Portanto, $6n = 6a + 6b$ e pela hipótese indutiva $6a = 0$ e $6b = 0$, logo $6n = 0$.

R Para $n = 1$ não existem $a, b < n$ tais que $n = a + b$, portanto $P(0) \not\Rightarrow P(1)$, onde $P(n)$ é a sentença $6n = 0$.

3. (2 PONTOS) Cinco rapazes e cinco moças devem posar para uma fotografia ocupando cinco degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras podemos arrumar esse grupo.

R Enfileirando todos os rapazes do lado esquerdo e as garotas do lado direitos temos 5! possibilidades pra fila dos rapazes e 5! possibilidades para a fila das garotas. Agora, em cada degrau há 2 possibilidades considerando quem esta na esquerda e na direita. Resultado $5!5!2^5$.

4. (1 PONTO) Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos e $n \geqslant 2$. Suponha que para dois conjuntos quaisquer A_i e A_j vale que

$$A_i \subseteq A_j \text{ ou } A_j \subseteq A_i.$$

Prove, por indução, que um desses conjuntos é subconjunto de todos os outros.

R Usando a primeira forma da indução.

Base. Para $n = 2$ temos $A_1 \subseteq A_2$ ou $A_2 \subseteq A_1$. No primeiro caso A_1 é subconjunto de todos os outros e no segundo caso A_2 é subconjunto de todos os outros.

Passo. *Hipótese indutiva*: Suponha que para $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos quaisquer ($n \geqslant 2$) com $A_i \subseteq A_j$ ou $A_j \subseteq A_i$ para todos i e j, existe um que é subconjunto de todos os outros.

Considere $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ conjuntos quaisquer ($n \geqslant 2$) com $A_i \subseteq A_j$ ou $A_j \subseteq A_i$, para todos i e j.

Pela hipótese indutiva existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que A_k está contido em todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Com relação ao índice $n + 1$ temos

(a) Ou $A_k \subseteq A_{n+1}$, e nesse caso A_k está contido em todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$,

(b) Ou $A_{n+1} \subseteq A_k$, e nesse caso, como A_k está contido em todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, temos que A_{n+1} está contido em todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Assim, para $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ com $A_i \subseteq A_j$ ou $A_j \subseteq A_i$, para todos i e j, temos que existe um que é subconjunto de todos os outros.

Pelo Princípio da Indução, o enunciado do exercício é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$ maior ou igual a 2.

5. (2 PONTOS) Escolha um dos itens pra resolver:

(a) De quantas maneiras podemos distribuir n balas idênticas entre k garotos e ℓ garotas de modo que cada garota receba pelo menos umas bala?