R Distribuo uma bala pra cada garota. Restam $n-\ell$ balas para serem distribuídas entre garotas e garotas com qualquer quantia para cada um, ou seja, o número de distribuições é o número de soluções *inteiras não-negativas* da equação

$$X_1 + \cdots + X_k + Y_1 + \cdots + Y_\ell = n - \ell,$$

com X_i sendo o número de balas pro i-ésimo garoto e Y_j o número de balas pra j-ésima garota. O número de soluções é

$$\binom{k+\ell+n-\ell-1}{n-\ell} = \binom{n-\ell+k-1}{n-\ell}.$$

(b) De quantas maneiras podemos distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas de modo que exatamente m caixas contenham exatamente uma bola?

R Escolhemos m caixas para ficarem vazias. Isso pode ser feitos de $\binom{n}{m}$ maneiras diferentes. Nas $n-m$ caixas restantes devemos distribuir r bolas de modo que nenhuma fique vazia. O número de distribuições é o número de soluções *inteiras e positivas* da equação

$$X_1 + \cdots + X_{n-m} = r,$$

ou seja, $\binom{r-1}{n-m-1}$. Portanto,

$$\binom{n}{m}\binom{r-1}{n-m-1}$$

maneiras de distribuir r bolas idênticas em n caixas distintas de modo que exatamente m caixas contenham exatamente uma bola

6. (3 pontos) Escolha um dos itens pra resolver:

(a) Mostre a identidade $\displaystyle\binom{a+b}{c} = \sum_{i=0}^{c} \binom{a}{i}\binom{b}{c-i}$

R Usando o Teorema Binomial:

$$\sum_{j=0}^{a+b} \binom{a+b}{j} x^j = (x+1)^{a+b} = (x+1)^a (x+1)^b = \left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} x^j\right) = \sum_{j=0}^{b}\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i}\binom{b}{j} x^{i+j}$$

assim, os coeficientes de x^c nas duas pontas da equação devem ser iguais, ou seja, tomando $j=c$ no lado esquerdo e $i+j=c$ no lado direito temos $\displaystyle\binom{a+b}{c} = \sum_{i=0}^{c} \binom{a}{i}\binom{b}{c-i}$

(b) Seja S o conjunto das soluções inteiras não-negativas de $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 10$. Mostre que

$$\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in S} PR(10; k_1, k_2, k_3) = 3^{10}.$$

R $PR(10; k_1, k_2, k_3)$ é o número de permutações (com repetição) de 10 símbolos onde k_1 símbolos são do tipo 1, k_2 são do tipo 2 e k_3 do tipo 3. Vamos chamar esses três símbolos de a, b e c.

Sabemos que o número de sequências com 10 letras tomadas de a, b, c é 3^{10}. Separe essas sequências em grupos, onde duas sequências s_1 e s_2 pertencem ao mesmo grupo se o número de ocorrências de cada letra é igual nas duas (o número de ocorrências da letra a em s_1 é igual ao número de ocorrências da letra a em s_2; o número de ocorrências da letra b em s_1 é igual ao número de ocorrências da letra b em s_2; o número de ocorrências da letra c em s_1 é igual ao número de ocorrências da letra c em s_2).

O número de grupos é o número de soluções inteiras não-negativas de $Y_1+Y_2+Y_3 = 10$, onde o Y_1 é o número de ocorrências da letra a, Y_2 é o número de ocorrências da letra b e Y_3 é o número de ocorrências da letra c. Cada grupo tem $PR(10; Y_1, Y_2, Y_3)$ sequências.

Pelo Princípio aditivo $\displaystyle\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in S} PR(10; k_1, k_2, k_3)$ é o número de sequências com 10 letras tomadas de a, b, c, que por sua vez é 3^{10}.