Matemática Discreta

Segunda Prova

22 de Junho de 2010

1. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

   Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N-1]$, onde $N = N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

   (a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência. (0.5 pontos)

   (b) Resolva esta recorrência explicando cada passo da resolução. (2.0 pontos)

   (c) Seja $I(i,j)$ o índice de v que corresponde à posição $[i,j]$ de M, isto é,

   $$M[i,j] = v[I(i,j)], \text{ para todo } i,j \in [1..N].$$

   Expresse para $I(i,j)$ em função de i, j e n. (1.0 pontos)

2. Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

   Sejam

   $p(n) :=$ número de pontos de um n-cubo,

   $l(n) :=$ número de linhas de um n-cubo.

   $p(0) = 1$ 0
   $p(1) = 2$ 1
   $p(2) = 4$ 4
   $p(3) = 8$ 12

   (a) Descreva $p(n)$ através de uma recorrência. (0.5 pontos)

   (b) Resolva esta recorrência, explicando cada passo da resolução. (1.0 pontos)

   (c) Descreva $l(n)$ através de uma recorrência. (0.5 pontos)

   (d) Resolva esta recorrência, explicando cada passo da resolução. (1.0 pontos)

   (e) É verdade que $p(n) = O(l(n))$? Justifique. (1.0 pontos)

3. Dê uma expressão livre de somatórios para $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i}$ explicando cada etapa da resolução.

   (2.5 pontos)

   $0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4}$