

# Matemática Discreta

## Segunda Prova

22 de Junho de 2010

1. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de  $n$  linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior  $M$ , de  $n$  linhas indexadas de 1 a  $n$ , será representada por um vetor  $v[0..N-1]$ , onde  $N = N(n)$  é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de  $n$  linhas.

- (a) Descreva  $N(n)$  através de uma recorrência. (0.5 pontos)
- (b) Resolva esta recorrência explicando cada passo da resolução. (2.0 pontos)
- (c) Seja  $I(i, j)$  o índice de  $v$  que corresponde à posição  $[i, j]$  de  $M$ , isto é,

$$M[i, j] = v[I(i, j)], \text{ para todo } i, j \in [1..N].$$

Expresse para  $I(i, j)$  em função de  $i, j$  e  $n$ . (1.0 pontos)

2. Para todo  $n \geq 0$ , um  $n$ -cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo  $n > 0$ , o  $n$ -cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do  $(n-1)$ -cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

Sejam

$p(n)$  := número de pontos de um  $n$ -cubo,

$l(n)$  := número de linhas de um  $n$ -cubo.

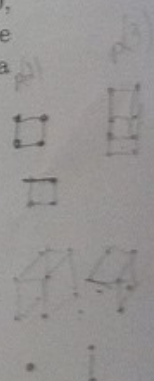
- (a) Descreva  $p(n)$  através de uma recorrência. (0.5 pontos)
- (b) Resolva esta recorrência, explicando cada passo da resolução. (1.0 pontos)
- (c) Descreva  $l(n)$  através de uma recorrência. (0.5 pontos)
- (d) Resolva esta recorrência, explicando cada passo da resolução. (1.0 pontos)
- (e) É verdade que  $p(n) = O(l(n))$ ? Justifique. (1.0 pontos)

3. Dê uma expressão livre de somatórios para  $\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i}$  explicando cada etapa da resolução.

(2.5 pontos)

$$0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4}$$

$$\begin{aligned} p(0) &= 1 \\ p(1) &= 2 \\ p(2) &= 4 \\ p(3) &= 8 \\ p(4) &= 16 \end{aligned}$$



$$p(n) = 2 \cdot p(n-1) + p(n-1)$$

$$4 \cdot 2 = 8$$

$$8 \cdot 2 = 16$$