Matemática Discreta

Prova Final

14 de Dezembro de 2010

Para todo $n \geq 0$, uma *n-rede* é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si.

A 0-rede tem um ponto e nenhuma linha.

Para todo $n > 0$, a n-rede é o diagrama obtido desenhando-se 3 cópias da $(n-1)$-rede e ligando cada ponto de cada ~~da~~ cópia aos seus correspondentes de cada uma das outras cópias por uma linha.

Dados dois pontos p e q de uma n-rede, uma **rota** de tamanho l entre p e q é uma sequência $(p_0, \ldots, p_l)$ de $l+1$ pontos da n-rede onde $p_0 = p$, $p_l = q$ e, para todo $1 \leq i \leq l$, existe uma linha ligando p_{i-1} a p_i.

Por exemplo, (p) é uma rota de tamanho 0 entre p e p, para todo ponto p numa n-rede e (p, q) é uma rota de tamanho 1 entre quaisquer pontos p e q de uma n-rede ligados por uma linha.

1. (0.25 pontos) Descreva o número de pontos de uma n-rede através de uma recorrência.
2. (1.25 pontos) Resolva esta recorrência, explicando cada passo da resolução.
3. (1.25 pontos) Descreva o número de linhas de uma n-rede através de uma recorrência.
4. (1.75 pontos) Resolva esta recorrência, explicando cada passo da resolução.
5. (1.5 pontos) Prove por indução que existe uma rota de tamanho no máximo n entre quaisquer dois pontos de uma n-rede.
6. Denotando por $P(n)$ o número de pontos numa n-rede e por $L(n)$ o número de linhas numa n-rede, é verdade que
   (a) (0.5 pontos) $P(n) = O(L(n))$?
   (b) (1.0 pontos) $P(n) = \Omega(L(n))$?
   (c) (1.0 pontos) $P(n) = o(L(n))$?
   (d) (1.0 pontos) $L(n) = o(P(n))$?
   (e) (1.0 pontos) existe uma rota de tamanho $O(\log P(n))$ entre quaisquer dois pontos de uma n-rede?

Justifique cada resposta.