Matemática Discreta

Prova Final

5 de Julho de 2011

1. (3.0 pontos) Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Prove **por indução** que se $s(n) = O(n)$ então $f(n) = O(n^2)$.

2. O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
F(n)
  Se n ≤ 1
     Devolva n
  Devolva F(n − 1) + F(n − 2)
```

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$.

(a) (1.0 pontos) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) (2.5 pontos) Resolva essa recorrência, explicando cada etapa da resolução.

(c) (2.0 pontos) É verdade que $S(n) = \Theta(2^n)$? Justifique.

(d) (1.5 pontos) Considere o algoritmo $F'(n)$, não recursivo, que devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci fazendo $S'(n) = n - 1$ somas. O algoritmo $F'(n)$ é mais eficiente que o algoritmo $F(n)$ do ponto de vista assintótico? Justifique.