

$x$   
 $\left(\frac{x}{2}\right)$

# Matemática Discreta

Turma A

20 de Dezembro de 2011

1. (3.0 pontos) Considere o Algoritmo  $\text{Exp}(x, n)$  dado por

$\text{Exp}(x, n)$
Se $n = 0$ Devolva 1
$e \leftarrow \text{Exp}(x, \lfloor n/2 \rfloor)$ $e \leftarrow e \times e$
Se $n$ é par Devolva $e$
Devolva $x \times e$

base 1, se  $n=0$   
 H.I.  $\text{Exp}(x, n) = x^n$

Prove por indução em  $n$  uma das seguintes afirmações.

- (a)  $\text{Exp}(x, n) = x^n$  para todo  $x \neq 0$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) A execução de  $\text{Exp}(x, n)$  efetua no máximo  $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$  multiplicações para todo  $x > 0$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ .

2. (4.0 pontos) Resolva uma das seguintes recorrências explicando cada etapa da resolução.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2f(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor) + n, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

$n \cdot 3^{-\log_5 n}$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

3. (4.0 pontos) Dê uma expressão livre de somatórios para uma das somas abaixo, explicando cada etapa da resolução.

(a)

$\left(\frac{x}{3}\right) (x-1)$

$$\sum_{i=0}^n \frac{i}{3^i}$$

$x^2 - x - \frac{1}{3}$   
 $x \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$   
 $\frac{1}{3^i} + \frac{1}{3^i}$

(b)

$$\sum_{i=0}^n F(i),$$

onde  $F$  é a sequência de Fibonacci dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

então  $(n+1)F(n)$