Matemática Discreta

Prova Final

21 de março de 2013

1. (2.0 pontos) Use o fato de que
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, \text{ para todo } 1 \leq k \leq n,$$
para provar por indução em n que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

2. Resolva as seguintes recorrências
   (a) (1.5 pontos) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1$
   (b) (2.0 pontos) $f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2\sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$
   Sugestão: Considere a função $g(n) = \lg f(n)$.

3. Dados $n, k > 0$, uma k-composição de n é uma sequência $(x_1, \ldots, x_k)$ de inteiros positivos satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$.
   (a) (1.5 pontos) Quantas k-composições admite um inteiro $n > 0$ para cada $1 \leq k \leq n$?
   (b) (1.5 pontos) Quantas composições admite um inteiro $n > 0$ no total?

   Em cada item, explique o raciocínio que leva à resposta apresentada.

4. (1.5 pontos) Em um campeonato com 10 competidores serão distribuídas 1 medalha de ouro para o campeão, 2 medalhas de prata (idênticas) para os dois seguintes e 4 medalhas de bronze (também idênticas) para os 4 seguintes. De quantas maneiras diferentes as medalhas podem ser distribuídas? Explique o raciocínio que leva à resposta apresentada.