CI237 – Matemática Discreta

Prof. Jair **3ª prova**

A prova tem duração de 100 minutos. **21-11-2008**

ESBOÇO DAS SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

Questão 1: [50 pontos]

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Responda verdadeiro ou falso e justifique a sua resposta em cada um das alternativas:

1. se $a < b$ então $n^a = o(n^b)$;
2. se $a < b$ então $\log(n^a) = o\big(\log(n^b)\big)$;
3. se $f(n) = O(g(n))$ então $2^{f(n)} = O(2^{g(n)})$;
4. $f(n) = O(g(n))$ implica que $\log(f(n)) = O(\log(g(n)))$.

Solução:

(1) **V**: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{n^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{b-a}} = 0$ pois $b - a > 0$, portanto $n^{b-a} \to \infty$.

(2) **F**: $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^a}{\log n^b} = \lim_{n\to\infty} \frac{a \log n}{b \log n} = \frac{a}{b}$.

(3) **F**: se $f(n) = 2n$ e $g(n) = n$ então $f(n) = O(g(n))$ mas $2^{2n} \neq O(2^n)$ pois $2^{2n} = 4^n \ll O(2^n)$.

(4) **F**: para $g(n) = 10^{1/n}$ e $f(n) = 10^{1+1/n}$ temos $f(n) \leq 10 \cdot g(n)$, entretanto, $\log g(n) = \frac{1}{n}$ e $\log f(n) = 1 + \frac{1}{n}$ e $1 + \frac{1}{n} \neq O(\frac{1}{n})$.

Questão 2: [20 pontos]

Itere a seguinte recorrência e proponha um limitante superior assintótico para $T(n)$.

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 \\ T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \lfloor \log_2 n \rfloor . \end{aligned}$$

Solução:

$$\begin{aligned} T(n) = &= T\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2 n \\ &= T\left(\frac{n}{2^2}\right) + \log_2 \frac{n}{2} + \log_2 n \\ &= T\left(\frac{n}{2^3}\right) + \log_2 \frac{n}{2^2} + \log_2 \frac{n}{2} + \log_2 n \\ &= T\left(\frac{n}{2^4}\right) + \log_2 \frac{n}{2^3} + \log_2 \frac{n}{2^2} + \log_2 \frac{n}{2} + \log_2 n \\ &= \dots \\ &= T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \log \frac{n}{2^i} \end{aligned}$$

fazendo $k = \log_2 n$ e usando que $T(1) = 0$ temos

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \log \frac{n}{2^i} \\ &= \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} \log n - \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} i \\ &= (\log_2 n)^2 - \frac{1}{2}\Big((\log_2 n)^2 - \log_2 n\Big) \\ &= \frac{1}{2}(\log_2 n)^2 - \frac{1}{2}\log_2 n \end{aligned}$$

portanto $T(n) = O((\log n)^2)$.

Questão 3: [20 pontos]

Com relação ao exercício anterior

(a) prove que sua proposta é uma solução;

Solução: Só o passo da indução para $T(n) \le c(\log_2(n))^2$ ($c = 1/2$ e $n_0 = 1$):

$$\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \lfloor \log_2 n \rfloor \\
&\le c(\log_2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)^2 + \lfloor \log_2 n \rfloor \text{ (por hipótese de indução)} \\
&\le c(\log_2 \frac{n}{2})^2 + \log_2 n \text{ (chão é não-decrescente)} \\
&= c(\log_2(n) - 1)^2 + \log_2 n \\
&= c(\log_2(n))^2 - 2c\log_2 n - c + \log_2 n \\
&= c(\log_2(n))^2 - (2c-1)\log_2 n - c \\
&\le c(\log_2(n))^2 \text{ (pela escolha de } c).
\end{aligned}$$

A base fica como exercício.

(b) a solução proposta é justa? Justifique.

Solução: Só o passo da indução para $T(n) \ge c\lfloor \log_2(n) \rfloor^2$ ($c = 1/4$ e $n_0 = 1$):

$$\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \lfloor \log_2 n \rfloor \\
&\ge c\left\lfloor \log_2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\rfloor^2 + \lfloor \log_2 n \rfloor \text{ (por hipótese de indução)} \\
&= c\left\lfloor \log_2 \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + \lfloor \log_2 n \rfloor \text{ (teo. 35 item 6)} \\
&= c\lfloor \log_2(n) - 1 \rfloor^2 + \lfloor \log_2 n \rfloor \\
&= c\lfloor \log_2(n) \rfloor^2 - 2c\lfloor \log_2 n \rfloor - c + \lfloor \log_2 n \rfloor \text{ (teo. 35 item 5)} \\
&= c\lfloor \log_2(n) \rfloor^2 - (2c-1)\lfloor \log_2 n \rfloor - c \\
&\ge c\lfloor \log_2(n) \rfloor^2 \text{ (pela escolha de } c)
\end{aligned}$$

portanto, $T(n) = \Omega(\lfloor \log n \rfloor^2)$, mas $\lfloor \log_2 n \rfloor^2 = \Omega((\log n)^2)$, portanto, $T(n) = \Omega((\log n)^2)$.
A base fica como exercício.

Questão 4: [10 pontos]

Utilize o método da iteração para solucionar (assintoticamente) a recorrência $T(n) = T(n-a) + T(a) + n$, onde $a \geq 1$ é uma constante.

Solução: Se a é constante então $T(a)$ é constante e

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(n-a) + T(a) + n \\
&= T(n-2a) + T(a) + (n-a) + T(a) + n \\
&= T(n-3a) + T(a) + (n-2a) + T(a) + (n-a) + T(a) + n \\
&= \ldots \\
&= T(n-ka) + kT(a) + (n-(k-1)a) + \cdots + (n-a) + n \\
&= T(n-ka) + kT(a) + \sum_{i=0}^{k-1}(n-ia)
\end{aligned}$$

fazendo $k = n/a - 1$ temos

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(a) + (\frac{n}{a} - 1)T(a) + (\frac{n}{a} - 1)n - a\frac{1}{2}(\frac{n}{a} - 1)^2 \\
&= \Theta(1) + \Theta(n)\Theta(1) + \Theta(n^2) \\
&= \Theta(n^2)
\end{aligned}$$